Ecole Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

CONCOURS FORMULE ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I **DUREE : 4 HEURES** **COEF. : 3**

LUNDI 27 AVRIL 1987 **14H à 18H**

ATTENTION : La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction, de même que la clarté et la précision des raisonnements sont importants.

PROBLEME N° I :

I- Pour chaque nombre réel a, on considère la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = (x-a)^{ax}$$

et on désigne par Γa le graphe de f_a.

1° a) Donner le domaine de définition de la fonction f_a noté Da

b) Calculer les limites aux bornes de Da suivant les valeurs de a.

c) La fonction f_a peut-elle être prolongée par continuité aux bornes de Da ?

2° La fonction f_a est-elle dérivable ? si oui, calculer sa dérivée pour $x \in Da$; puis pour $x = a$, suivant les valeurs de a. Dans le cas où f_a admet une dérivée, étudier son signe.

3° Etudier les variations de f_a et construire son graphe Γa suivant les valeurs de a dans chacun des cas suivants :

$a < -1$; $a = -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < \frac{1}{e^2}$; $a = \frac{1}{e^2}$

II- On considère les applications g_a : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant toujours du paramètre a définies en posant $g_a(x) = ae^x + x^2 + 2x + 2$

1° Etudier le comportement de g_a quand $x \longrightarrow +\infty$.

Démontrer qu'il existe une application g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to -\infty} [g_a(x) - g(x)] = 0$ pour tout réel a.

Tournez la page S. V. P.

2° Calculer $g'_a(x)$. Démontrer que $y = g_a(x)$ et $y' = g'_a(x)$ vérifient quel que soit a, une relation de la forme $F(x,y,y') = 0$ que l'on déterminera. En déduire l'ensemble des points de Ca où la tangente est parallèle à l'axe O_x

3° Calculer $y'' = g''_a(x)$; en déduire l'ensemble des points d'inflexion de Ca.

4° Pour $a \neq a'$, étudier les positions relatives des graphes Ca et Ca'

III- Dans cette partie, on étudie des fonctions d'une variable réelle qui prennent, selon le cas, des valeurs positives, ou strictement positives, avec $a \in \mathbb{R}$

1°- Soit h_a la fonction définie en posant pour tout réel x strictement positif $h_a(x) = x^a e^{-1/x}$

Démontrer que $h_a(x)$ a une limite quand $x \to 0^+$

2°- On suppose désormais que h_a a été prolongée par continuité en zéro et on définit k_a telle que : $\forall x \in \mathbb{R}+$, $k_a(x) = \int_0^x t^a e^{-1/t} dt$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de la fonction $h_a(x)$ est de la forme :

$(\forall x>0)$ $h_a^{(n)}(x) = x^{a-2n} e^{-1/x} P_{(a,n)}(x)$ où $P_{(a,n)}$ est un polynôme de degré inférieur à n.

b) Calculer $P_{(a,n)}$ pour n = 0, n = 1, n = 2 et écrire la relation permettant de calculer $P_{(a,n)}$ en fonction de $P_{(a,n-1)}$ et de sa dérivée.

c) Démontrer la relation $k_a(x) = x^{a+2} e^{-1/x} - (a+2) k_{(a+1)}(x)$

d) Démontrer qu'il existe une suite de nombres $C_{a,i}$ $i \in \mathbb{N}$ telle que :

$$k_a(x) = x^{a+2} e^{-1/x} \sum_{i=0}^{i=p} C_{(a,i)} x^i + C_{(a,p+1)} k_{(a+p+1)}(x)$$

Pour tout entier naturel p et claculer les nombres $C_{(a,i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$.

PROBLEME N° II :

On notera $\mathbb{P}$ la probabilité d'un évènement .

Soit A_1, A_2, ... A_n une suite d'évènements indépendants de même probabilité p avec $0<p<1$. On pose $q = 1-p$ et on désigne par X la variable aléatoire égale à l'indice du premier évènement qui se réalise (X=1 si A_1 se réalise, X=2 si A_1 ne se réalise pas et si A_2 se réalise etc...)

1°- Calculer $\mathbb{P}(X=k)$

Que vaut $\sum_{k=1}^{k=+\infty} \mathbb{P}(X=k)$?

2°- On pose $\varphi(u) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X=k) u^k$ une fonction polynomiale de variable de u.

a) Calculer en fonction de p,q et u, $\varphi(u)$

b) Prouver que $\varphi'(1) = \mathbb{E}(x)$ avec $\mathbb{E}$, l'espérance de X. Calculer alors V(x) la variance de X.

3°- calculer, pour $n \geq 1$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(x=n+k/x>k)$ que remarque-t-on ?

4°- Calculer la probabilité conditionnelle pour que X=2, sachant que X est paire.

5°- On désigne par Y la variable aléatoire égale à l'indice i pour lequel, pour la première fois $A_{i-1} \cap A_i$ se réalise. On pose alors $r_n = \mathbb{P}(y=n)$

Calculer r_2 , r_3 , r_4 , r_5 , puis plus généralement, exprimer pour $n>3$ r_n à l'aide de r_1 , r_2 , ..., r_{n-3} En déduire que $\sum_n r_n = 1$.

• • •